Dynamique des systèmes discrets avec liaisons unilatérales parfaites

Patrick Ballard

Dynamique des systèmes discrets avec liaisons unilatérales parfaites

P. Ballard[a]

a. *Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Marseille.*

Résumé :

On considère la dynamique des systèmes discrets avec liaisons unilatérales et impacts en se restreignant au cas sans frottement. En prenant comme point de départ, les points de vue dégagés par Schatzman et Moreau à la fin des années 70, on montre comment parvenir à la formulation systématique et cohérente du problème de Cauchy associé à la dynamique d'un système discret arbitraire. Sous l'hypothèse que les données sont analytiques, on établit un équivalent du théorème de Cauchy pour ces systèmes non-réguliers.

Abstract :

The dynamics of discrete systems with frictionless unilateral constraints is studied. Starting from the point of view of Schatzman and Moreau at the end of the 1970s, it is derived a general consistent formulation of the Cauchy problem associated with the dynamics of an arbitrary discrete system with finitely many unilateral constraints. Under the assumption that the data are analytic, a general existence and uniqueness theorem for the nonsmooth Cauchy problem is obtained.

Mots clefs : **dynamique non-régulière ; impacts ; existence et unicité**

1 Introduction

Dans le cadre de la mécanique classique, la dynamique d'un système à nombre fini de degré de liberté est gouvernée par une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 :

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = f\big(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t); t\big),$$

où $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$ représente une configuration du système, et l'application $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ un mouvement. Les vecteurs $\dot{\mathbf{q}}$ et $\ddot{\mathbf{q}}$ désignent comme à l'accoutumée les dérivées premières et secondes par rapport au temps. Cauchy a montré vers 1850, sous l'hypothèse que f est une fonction de classe C^1, que l'adjonction à cette équation différentielle, d'une condition initiale prescrivant la configuration et la vitesse à l'instant initial, déterminait de façon unique l'évolution ultérieure. Des exemples simples permettent de constater que la solution de cette équation différentielle peut exploser en temps fini, mais la condition supplémentaire :

$$\forall t, \qquad \Big| f\big(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\big)\Big| \le l_1(t) + l_2(t)\Big(\big|\mathbf{q}\big| + \big|\dot{\mathbf{q}}\big|\Big),$$

où $|\cdot|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$, et l_1, l_2 deux fonctions localement intégrables, élimine cette pathologie et permet d'assurer que la solution est définie pour tout temps (dynamique éternelle). Notons, que si f est seulement supposée continue, le problème de Cauchy a toujours des solutions (théorème de Peano), mais celles-ci peuvent ne plus être uniques.

Ce déterminisme de la dynamique classique est maintenant incorporé dans les esprits et sert de point de départ aux théories de la stabilité et du contrôle.

Un défaut du cadre général décrit précédemment, auquel pratiquement seule la mécanique céleste échappe, est qu'en général l'équation différentielle évoquée plus haut produit des mouvements au cours desquels certains solides du système *s'interpénètrent*. Pour empêcher cette éventualité, on est amené à ajouter au système des conditions supplémentaires de non-pénétration. Ces conditions supplémentaires prennent la forme d'inégalités : on parle de liaisons unilatérales. Le point de vue qui a prévalu jusqu'à la fin des années 1970 sur cette situation était qu'il fallait considérer un jeu d'équations différentielles différentes, chacune apte à décrire des évolutions où seules certaines liaisons unilatérales étaient actives (au sens où l'égalité était réalisée) et au cours de l'évolution du système, on pouvait être amené à changer l'équation différentielle en fonction de l'étude des signes des réactions associées. Ce point de vue était inapproprié tant pour le calcul numérique que pour les investigations théoriques. En particulier, malgré des efforts répétés, aucune généralisation du théorème de Cauchy à cette situation n'avait pu être obtenue.

À la fin des années 1970, Michelle Schatzman [1] et Jean-Jacques Moreau [2] ont commencé à essayer d'obtenir une formulation mathématiquement cohérente du problème d'évolution, en s'appuyant sur la théorie de la mesure. Le prix à payer était qu'il fallait sortir du cadre des équations différentielles ordinaires. Cet article développe ce point de vue et montre qu'il permet d'obtenir une formulation cohérente du problème d'évolution associé à la dynamique de n'importe quel système discret avec un nombre fini de liaisons unilatérales *sans frottement*. Cette formulation est exploitée pour montrer un équivalent du théorème de Cauchy (existence et unicité de l'évolution dynamique à partir d'une condition initiale donnée) pour la dynamique des systèmes discrets avec liaisons unilatérales sans frottement. À la différence du cas régulier, il existe des exemples de solutions multiples alors que toutes les données sont supposées de classe C^∞. L'existence et l'unicité sont démontrées seulement lorsque les données sont supposées être des fonctions *analytiques* de leurs arguments.

2 Le cas à un seul degré de liberté

Considérons une particule ponctuelle astreinte à se mouvoir sur une ligne de sorte que sa position est repérée par un seul scalaire q et qu'un mouvement sera alors une fonction $q(t)$. On exerce sur cette particule une force $f(t)$, fonction du temps et supposée donnée. Cette particule est également astreinte à rester sur une demi-droite :

$$\forall t, \qquad q(t) \le 0. \tag{1}$$

La réalisation de cette liaison unilatérale exige la prise en compte d'un effort de réaction r de sorte que l'équation de la dynamique prend la forme :

$$\ddot{q} = f + r. \tag{2}$$

On suppose que l'interaction entre la particule et l'obstacle est de type *contact*, c'est-à-dire :

- il n'y a pas d'action à distance de l'obstacle sur la particule,
- l'effort de réaction exercé par l'obstacle est un effort de répulsion, c'est-à-dire toujours dirigé vers la demi-ligne où se meut la particule.

Il résulte du premier point qu'une particule libre de force extérieure, initialement à distance non nulle de l'obstacle avec une vitesse non nulle dirigée vers l'obstacle va nécessairement arriver sur l'obstacle avec une vitesse non nulle. Le respect de la liaison unilatérale (1) est alors incompatible avec l'existence d'une vitesse (dérivée par rapport au temps) au sens classique à l'instant où la particule rencontre l'obstacle. Il en résulte que l'équation de la dynamique (2) ne peut certainement pas s'entendre au sens classique, mais seulement au sens des distributions. L'accélération $\ddot{q}$, et donc l'effort de réaction r doivent donc se comprendre comme des distributions. Mais, en vertu du second point, la distribution r doit être *négative*, ce qui ne peut que signifier qu'elle prend une valeur négative ou nulle sur toute fonction test C^∞ à support compact qui soit positive ou nulle. Cette propriété entraîne alors classiquement que la distribution r est une *mesure*. Si on se limite au cas où la force extérieure $f(t)$ est une fonction localement intégrable (identifiée à la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue correspondante), les trajectoires $t \mapsto q(t)$ sont donc à chercher dans la classe MAM des mouvements à accélération mesure. Il s'agit des distributions définies sur $\mathbb{R}^+$ dont la dérivée seconde $\ddot{q}$ est une mesure. De telles distributions s'identifient à des fonctions $q(t)$ *continues*, admettant des dérivées au sens classique $\dot{q}^-(t)$, $\dot{q}^+(t)$ à gauche et à droite de tout $t > 0$ et telles que les fonctions $\dot{q}^-(t)$ et $\dot{q}^+(t)$ soient localement à variation bornée.

Si l'on se donne une condition initiale compatible avec la liaison unilatérale ($q_0 \leq 0$ et $q_0 = 0 \Rightarrow v_0 \leq 0$), le problème est alors de trouver $q \in MAM$ tel que :

- $q(0) = q_0, \qquad \dot{q}^+(0) = v_0,$
- $\forall t, \qquad q(t) \leq 0,$
- $r \stackrel{\text{déf}}{=} \ddot{q} - f$ est une mesure *négative*,
- $\operatorname{supp} r \subset \big\{t \; ; \; q(t) = 0\big\}.$

Le problème d'évolution ayant été ainsi formulé, on observe très facilement qu'on ne peut s'attendre à l'unicité de solution, en général. En effet, une particule libre d'effort extérieur ($f \equiv 0$), initialement à distance non nulle de l'obstacle et avançant vers lui à vitesse non nulle, peut admettre n'importe quelle valeur de vitesse négative ou nulle après impact et s'éloigner ensuite de l'obstacle en conservant cette valeur de vitesse indéfiniment. Tous les mouvements correspondants fournissent une solution au problème d'évolution ainsi que formulé plus haut. En d'autres termes, et cette remarque avait été faite par Newton, l'équation de la dynamique associée aux seules conditions de contact ne permet pas de prédire le mouvement. Cela vient du fait que ce qui gouverne effectivement le rebond d'un corps sur un autre est la propagation des ondes dans ces corps qui sont nécessairement déformables. Le niveau de description en terme de particule ponctuelle étant trop grossier pour permettre la description de ces phénomènes de propagation d'ondes, il en résulte cette indétermination. Si l'on veut s'en tenir à ce niveau de schématisation des corps en jeu, il faut donc, en suivant Newton, réinjecter une partie de l'information perdue au travers d'une *équation constitutive des impacts*, il s'agit d'une équation phénoménologique supplémentaire destinée à résumer la complexité des phénomènes en jeu lors de l'impact qui exprime la vitesse après impact comme une fonction, supposée connue (par exemple empiriquement), de la vitesse avant impact :

$$q(t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{q}^+(t) = \mathscr{F}\big(\dot{q}^-(t)\big).$$

Le statut de cette équation constitutive d'impact est exactement le même que celui de la loi de comportement en mécanique des milieux continus. Notons que c'est l'unicité au problème de Cauchy qui guide implicitement son introduction pour lever une indétermination. Un exemple classique d'une telle équation constitutive d'impact est l'équation *élastique* :

$$q(t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{q}^+(t) = -\dot{q}^-(t),$$

et qui est aussi celle que nous retiendrons dans la suite de cette discussion introductive.

On est alors amené à vouloir étudier le problème de Cauchy suivant.

Problème $\mathscr{P}_1$. Trouver $q \in MAM$ tel que :

- $q(0) = q_0, \qquad \dot{q}^+(0) = v_0,$
- $\forall t, \qquad q(t) \leq 0,$
- $r \stackrel{\text{déf}}{=} \ddot{q} - f$ est une mesure *négative*,
- $\operatorname{supp} r \subset \big\{t \; ; \; q(t) = 0\big\},$
- $q(t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{q}^+(t) = -\dot{q}^-(t).$

L'existence de solution pour ce type de problème a été démontrée pour la première fois par Michelle Schatzman [1] dans sa thèse. Sous la faible hypothèse $f \in L^1(0, T; \mathbb{R})$, elle introduit un problème approché plus régulier en pénalisant la pénétration de la particule dans l'obstacle, démontre les estimations nécessaires permettant de passer à la limite sur la pénalisation (modulo l'extraction de sous-suites), et montre que la fonction limite est bien solution du problème unilatéral. À ma connaissance, Michelle Schatzman est aussi la première à introduire la classe des mouvement à accélération mesure dans ce contexte, dans le but de parvenir à une formulation cohérente du problème d'évolution correspondant.

Une autre démonstration d'existence basée sur l'introduction d'une discrétisation du temps a été donnée par la suite par Manuel Monteiro-Marques [3].

Dans sa thèse, Michelle Schatzman a aussi fourni un contre-exemple frappant montrant que, même si la fonction f est C^∞, il n'y a pas unicité de solution au problème $\mathscr{P}_1$, en général. En fait, il semble qu'un tel contre-exemple ait été exhibé pour la première fois par Aldo Bressan [4] en 1960.

Ce contre-exemple concerne le cas particulier où la particule se trouve initialement au repos et en contact avec l'obstacle ($q_0 = 0$, $v_0 = 0$), et où la force, supposée être une fonction C^∞ du temps t, reste constamment dirigée *vers* l'obstacle ($f \geq 0$). L'immobilité ($q \equiv 0$) fournit alors une solution au problème $\mathscr{P}_1$ correspondant et il s'agit d'ajuster alors la fonction f de manière à ce que le problème $\mathscr{P}_1$ admette éventuellement une autre solution, distincte de l'immobilité. On considère alors une suite infinie d'instants t_n décroissant strictement vers 0. On coupe alors chaque intervalle $]t_{n+1}, t_n[$ en deux : $]t_{n+1}, t_n[\, = \,]t_{n+1}, \tau_n] \cup]\tau_n, t_n[$, et on définit la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]t_{n+1}, t_n[$, de sorte qu'elle soit identiquement nulle sur la première partie et égale à une « bosse de Massin » (qui se raccorde de façon C^∞ avec 0) sur la deuxième partie :

$$f(t) = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{si } t \in \,]t_{n+1}, \tau_n]\,, \\ f_n \exp\Big(-\frac{1}{(t_n - t)(t - \tau_n)}\Big), & \text{si } t \in \,]\tau_n, t_n[\,, \end{array} \right.$$

où f_n désigne le terme général d'une suite strictement positive pour lors encore arbitraire. La fonction f ainsi définie est clairement C^∞ sur $]0, t_0]$. Elle le sera sur $[0, t_0]$, si la suite f_n décroît suffisamment vite quand n tend vers l'infini. On cherche alors à construire un mouvement $q(t)$ associé à cette loi de force correspondant à un vol libre de la particule sur l'intervalle $]t_{n+1}, t_n[$ avec des impacts élastiques en chaque instant t_n :

$$\dot{q}^-(t_n) = v_n = -\dot{q}^+(t_n), \tag{3}$$

où v_n désigne une nouvelle suite strictement positive encore arbitraire. La question est alors d'ajuster les suites t_n, f_n, τ_n et v_n de manière à garantir :

- $f \in C^\infty([0, t_0]\,, \mathbb{R})$,
- $\ddot{q} = f$ sur chaque intervalle $]t_{n+1}, t_n[$ est cohérent $q(t_n) = 0$ ainsi que (3).

Un tel ajustement est toujours possible (voir par exemple [5]), et, pour la fonction f associée à cet ajustement, le problème $\mathscr{P}_1$ correspondant admet au moins deux solutions : l'immobilité et une solution avec accumulation infinie d'impacts à droite de l'origine des temps.

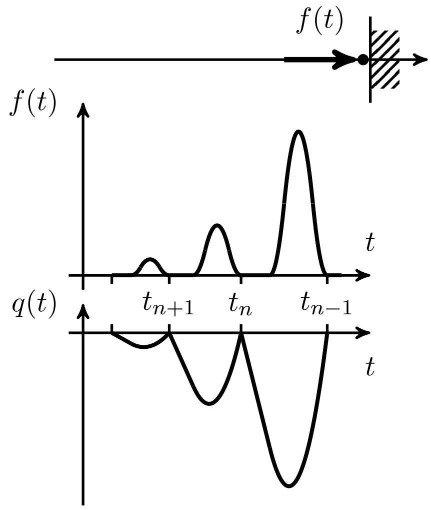

FIGURE 1 – Le contre-exemple de Bressan-Schatzman.

Percivale [6] a remarqué dans sa thèse que le problème $\mathscr{P}_1$ formulé à la page 3, dont l'existence de solution est garantie par un théorème de Michelle Schatzman dès que $f \in L^1$, admet une solution unique pour les fonctions f *analytiques*. Dans la section suivante, on propose une formulation générale applicable à la dynamique des systèmes discrets avec liaisons unilatérales *sans frottement*, et on verra que le problème de Cauchy correspondant admet une solution unique pourvu que les données soient des fonctions analytiques de leurs arguments.

3 Formulation générale de la dynamique des systèmes discrets avec liaisons unilatérales sans frottement

On considère un système discret dont on notera Q la variété des configurations supposée au moins de classe C^2. Par définition, la dimension de cette variété est le nombre de degrés de liberté du système. Classiquement, la donnée de la répartition de masse permet d'équiper cette variété d'une structure Riemannienne, et on notera $\left(\cdot,\cdot\right)_q$ le produit scalaire induit sur l'espace tangent T_qQ. L'énergie cinétique est alors la moitié de la forme quadratique associée à ce produit scalaire :

$$K(q,\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{q}}\right)_q$$

On note $f(q,\dot{\mathbf{q}};t) \in T_q^*Q$ les efforts généralisés, de sorte que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\flat\frac{\mathrm{D}\dot{\mathbf{q}}}{\mathrm{D}t} = f(q,\dot{\mathbf{q}};t),$$

où $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ désigne la dérivée covariante le long du mouvement et $\flat : T_qQ \to T_q^*Q$ l'isomorphisme entre l'espace tangent et son dual induit par la structure Euclidienne. Dans un paramétrage (carte locale) quelconque, cette équation du mouvement prend la forme des équations de Lagrange :

$$\forall i = 1,\dots,d, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial K}{\partial q^i} = f_i(q,\dot{\mathbf{q}};t).$$

On se donne alors n liaisons unilatérales φ_i définissant un ensemble A de configurations admissibles :

$$A = \Big\{q \in Q \;\Big|\; \forall i = 1,\dots,n, \quad \varphi_i(q) \leq 0\Big\}.$$

Notant $J(q)$ l'ensemble des liaisons actives dans la configuration q :

$$J(q) = \Big\{i \in \{1,\dots,n\} \;\Big|\; \varphi_i(q) = 0\Big\},$$

on suppose, comme à l'accoutumée, les liaisons unilatérales φ_i *fonctionnellement indépendantes* : pour tout $q \in A$, la famille $\left\{\mathrm{d}\varphi_i(q)\right\}_{i\in J(q)}$ est une famille libre de T_q^*Q. On notera également $V(q)$ le cône des vitesses à droite admissibles dans la configuration q et $N(q)$ son cône polaire pour la structure Euclidienne de $T_q(Q)$:

$$V(q) = \Big\{\mathbf{v} \in T_qQ \;\Big|\; \forall i \in J(q), \quad \left\langle \mathrm{d}\varphi_i(q),\mathbf{v}\right\rangle_q \leq 0\Big\},$$
$$N(q) = \Big\{\mathbf{v} \in T_qQ \;\Big|\; \forall \mathbf{w} \in V(q), \quad \left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)_q \leq 0\Big\}.$$

Avec ces notations élémentaires, on est en mesure de formuler le problème de Cauchy associé à la dynamique des systèmes discrets avec liaisons unilatérales sans frottement. Pour cela, on se donne une condition initiale $(q_0,\mathbf{v}_0)$ compatible avec les liaisons unilatérales : $q_0 \in A$, $\mathbf{v}_0 \in V(q_0)$.

Problème $\mathscr{P}_d$. Trouver $q \in MAM$ et n mesures λ_i tels que tel que :

- $q(0) = q_0, \qquad \dot{\mathbf{q}}^+(0) = \mathbf{v}_0,$
- $\forall t, \qquad q(t) \in A,$
- $\flat\dfrac{\mathrm{D}\dot{\mathbf{q}}}{\mathrm{D}t} - f(q,\dot{\mathbf{q}};t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\mathrm{d}\varphi_i(q),$
- $\forall i \in \{1,\dots,n\}, \qquad \lambda_i \leq 0,$
- $\operatorname{supp}\lambda_i \subset \big\{t\;;\;\varphi_i(q(t)) = 0\big\},$
- $q(t) \in \partial A \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\mathbf{q}}^+(t) = \mathscr{F}(q,\dot{\mathbf{q}}^-(t)).$

Dans cette formulation, *MAM* désigne les mouvements dont les coordonnées dans n'importe quelle carte locale sont des fonctions dont la dérivée seconde au sens des distributions est une mesure. La fonction $\mathscr{F}$, supposée donnée, exprime l'équation constitutive des impacts. On la suppose compatible avec les liaisons unilatérales parfaites, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\forall q \in \partial A, \quad \forall \mathbf{v}^- \in -V(q), \qquad \begin{array}{l} \mathscr{F}(q, \mathbf{v}^-) \in V(q), \\ \mathscr{F}(q, \mathbf{v}^-) - v^- \in -N(q). \end{array}$$

On ajoute en plus l'exigence que l'énergie cinétique du système ne peut augmenter au cours d'un impact :

$$\forall q \in \partial A, \quad \forall \mathbf{v}^- \in -V(q), \qquad \left\| \mathscr{F}\left(q, \mathbf{v}^-\right) \right\|_q \leq \left\| \mathbf{v}^- \right\|_q .$$

4 Un pendant du théorème de Cauchy-Lipschitz pour la dynamique non-régulière

Le résultat suivant généralise celui montré par Percivale pour le problème $\mathscr{P}_1$. Il a été conjecturé à de multiples reprises depuis le contre-exemple de Bressan en 1960. La démonstration complète de ces deux théorèmes se trouve dans [5], [7], [8].

Théorème 1 *On suppose que la variété Riemannienne Q des configurations du système est analytiques. On suppose également que la fonction $f(q, \mathbf{v}, t)$ ainsi que les fonctions φ sont des fonctions analytiques de leurs arguments. Alors, le problème $\mathscr{P}_d$ admet une solution maximale unique.*

Théorème 2 *On suppose que la variété Riemannienne Q des configurations du système est complète. On suppose également que la fonction $f(q, \mathbf{v}, t)$ satisfait l'estimation :*

$$\|f(q, \mathbf{v}; t)\|_q^* \leq l(t) \left(1 + d(q, q_0) + \|\mathbf{v}\|_q\right),$$

pour tout $(q, v) \in TQ$ et presque tout t, où $d(\cdot, \cdot)$ est la distance Riemannienne et $l(t)$, une fonction (nécessairement positive) dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Alors, la dynamique est éternelle, c'est-à-dire, que la solution maximale du problème $\mathscr{P}_d$ est définie tout temps $t \geq 0$.

Références

[1] Schatzman, M. 1978 A class of nonlinear differential equations of second order in time. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications* **2**, pp. 355–373.

[2] Moreau, J. J. 1983 Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints. In *Unilateral problems in structural analysis* (G. Del Piero and F. Maceri, eds.) pp. 173–221, Springer-Verlag.

[3] Monteiro-Marques, M. 1993 *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems*, Birkhaüser, Basel-Boston-Berlin.

[4] Bressan, A. 1960 Incompatibilità dei teoremi di esistenza e di unicità del moto per un tipo molto comune e regolare di sistemi meccanici. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III* **XIV**, pp. 333–348.

[5] Ballard, P. 2000 The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **154**, pp. 199–274.

[6] Percivale, D. 1985 Uniqueness in the elastic bounce problem, i. *Journal of Differential Equations* **56**, pp. 206–215.

[7] Ballard, P. 2001 Formulation and well-posedness of the dynamics of rigid-body systems with perfect unilateral constraints. *Philosophical Transactions of the Royal Society, A* **359**, pp. 2327–2346.

[8] Ballard, P. 2002 Formulation and well-posedness of the dynamics of rigid bodies systems with unilateral or frictional constraints. In *Advances in Mechanics and Mathematics* (D. Gao and R. Ogden, eds.), pp. 3–88, Kluwer.